Lycée	feria
PROF :	hamdi
COEF :	3

Devoir de synthèse N°1

Mathématiques

4eme sciences Exp

Durée : 2heures

16/12/2015

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2-(1+\sqrt{2})z+\sqrt{2}=0$.

b) $Z+\frac{1}{z}=1.$

c) $Z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}.$

2) Soit $P(z)=z^4-(1+\sqrt{2})z^3+(2+\sqrt{2})z^2-(1+\sqrt{2})z+1$

a) Vérifier que tout $z\in\mathbb{C}^*$: $\frac{P(z)}{z^2}=(Z+\frac{1}{z})^2-(1+\sqrt{2})(Z+\frac{1}{z})+\sqrt{2}.$

b) En utilisant ce qui précède , résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(z) = 0.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

1) a) Montrer que pour tout $x\in[k,k+1]$ avec $k\in\mathbb{N}^*$: $\frac{-3}{k^4}\leq f'(x)\leq\frac{-3}{(k+1)^4}$.

b) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $\frac{3}{(k+1)^4}\leq f(k)-f(k+1)\leq\frac{3}{k^4}$;

c) En déduire que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ $\frac{1}{(k+1)^4}\leq\frac{1}{3k^3}-\frac{1}{3(k+1)^3}\leq\frac{1}{k^4}$)

2) **Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{n^4}$**

a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{3}-\frac{1}{3n^3}\leq U_n\leq\frac{4}{3}-\frac{1}{3n^3}.$

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 3

On considère les fonctions f et g avec :

$f(x)=\frac{x^4+5x^3+1}{x^4+1}$, $x\in IR$ et $\begin{cases} g(x)=f(\tan x) & si\ x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \end{cases}$

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

b) Montrer que g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

2) a)En appliquant le théorème de Rolle , montrer qu'il existe $c\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $g'(c)=0$.

b) En déduire qu'il existe $\alpha\in]0;+\infty[$ tel que $f'(\alpha)=0$.

3) Dans l'annexe ci –jointe, on a tracé dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, sur $[0,+\infty[$,les courbes (C1) de la fonction f ainsi que la courbe (C2) de sa fonction dérivée f'.

a) Tracer la tangente à (C1) au point d'abscisse α .

b) Résoudre graphiquement l'équation $f'(x) = 0$ dans $[0, +\infty[$.

c) Donner le signe de $f'(x)$ sur $[0, +\infty[$.

d) Donner le nombre des points d'inflexion de (C1) sans justification.

4) a) Montrer que f est une bijection de $[\alpha, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera, on prend $f(\alpha) = \beta$.

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} (fonction réciproque de f) à gauche en β. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, tracer la courbe représentative (Cf^{-1}) de la fonction f^{-1} et sa demi-Tangente au point d'abscisse β.

Exercice 4

Dans l'annexe ci –jointe, $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$ est un repère orthonormé direct du plan et (ς) le cercle de centre A et de rayon 2.

Les points A et B d'affixes respectives i et $3i$. Pour tout point M différent de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $(z' - i)(\overline{z} + i) = -2$.

1) a) Montrer que $AM'.AM = 2$.

b) En déduire que si M varie sur le cercle (ς) alors M' varie sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

2) a) Justifier que $\frac{z'-i}{z-i}$ est un nombre réel ; en déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires et de sens opposés.

b) Placer dans le repère $(O, \overrightarrow{U}, \overrightarrow{V})$, le point $D(x, \frac{3}{2})$ qui appartient à (ς) avec $x > 0$ et construire son image le point D'.

3) a) Justifier que $z' = \frac{i(\overline{z}+3i)}{\overline{z}+i}$.

b) Montrer que $OM' = \frac{BM}{AM}$.

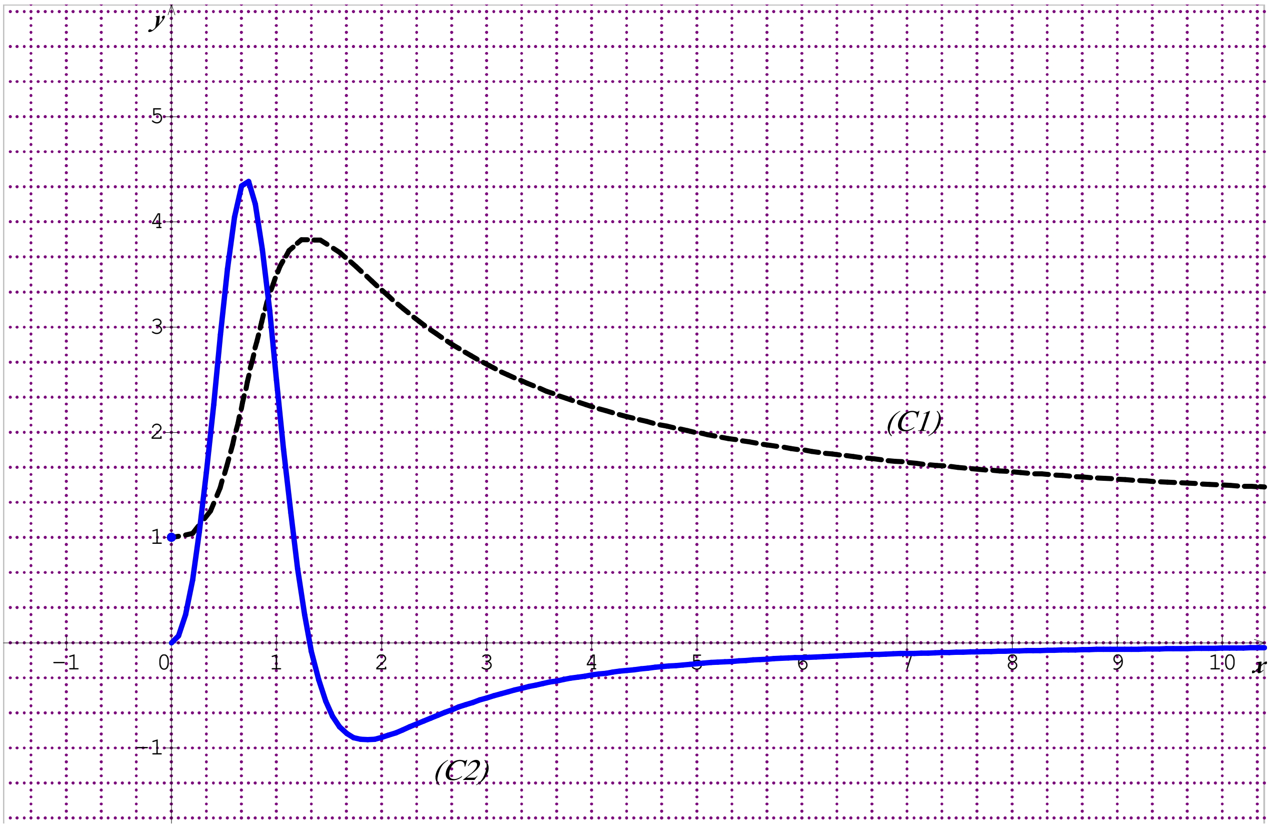
c) En déduire que si M' varie sur le cercle de centre O et de rayon 1, alors M varie sur une droite Δ que l'on déterminera.

BONNE CHANCE

Annexe à ren dre avec la copie

Nom & Prénnom : ....

Exercice 3



Exercice 4